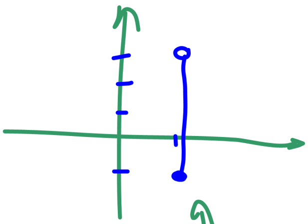
بردار

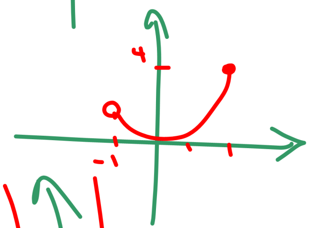
رسم روابط:

مثال ۱ : در هر یک از منحنی‌های زیر روابط را نمایش دهید.

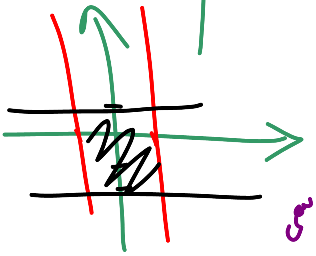
۱) $\boxed{x=۱,}\ -۱\le y<۳$



۲) $\boxed{y=x^۲,}\ -۱<x\le ۲$



۳) $-۱\le x\le ۱, -۲\le y\le ۱$

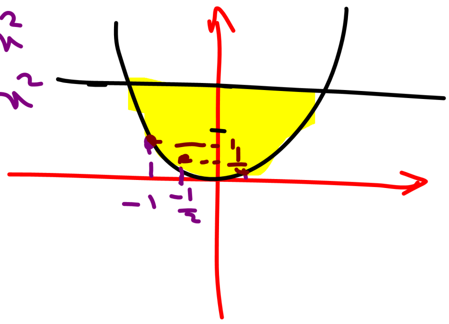


۴) $\boxed{x^۲<y\le ۲}$

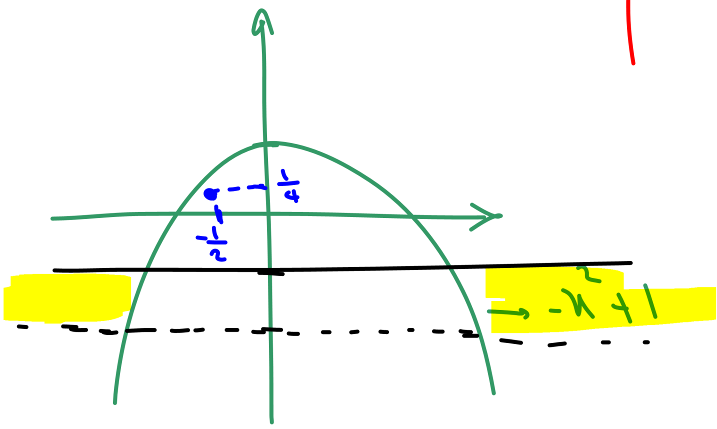
$y=x^2$

داخل سهمی ← $y>x^2$

بیرون ← $y<x^2$



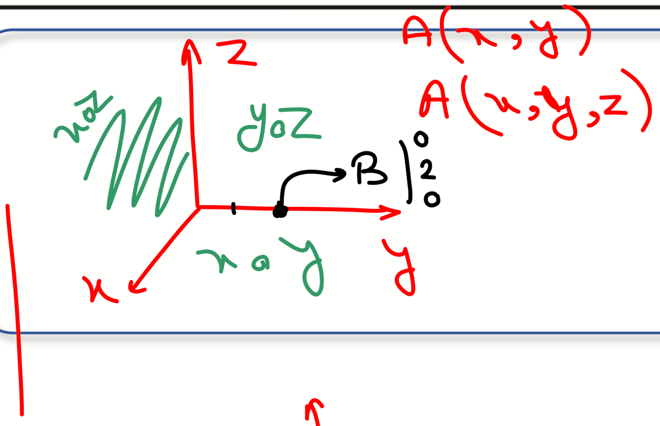
۵) $y\ge x^۲$ → داخل سهمی



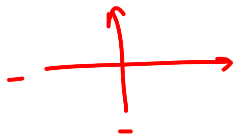
۶) $\begin{cases}-۲<y\le -۱\\ \boxed{y<-x^۲+۱}\end{cases}$ بیرون سهمی

داخل ← $y>-x^2$

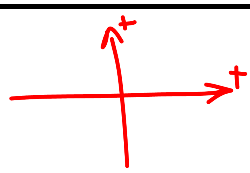
فضای R^3:



مثال ۲: نقطه‌ی (−۲,−۳,۱) در ناحیه‌ی ...سوم... قرار دارد.



مثال ۳: نقطه‌ی (۲,۲,−۱) در ناحیه‌ی پنجم قرار دارد. درست



مثال ۴: نقطه‌ی (۲,−۲,۰) در صفحه‌ی، ...xoy... است.

مثال ۵: نقطه‌ی (−۱,۰,۰) در، ...محور xها... قرار دارد.

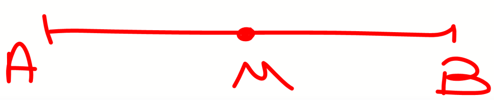
مثال ۶: نقطه‌ی (۰,−۲,۴) در، ...صفحه yoz... است.

فاصله دو نقطه:

$$AB=\sqrt{(x_{بزرگ}-x_{کم})^2+(y_{بزرگ}-y_{کم})^2+(z_{بزرگ}-z_{کم})^2}$$

مختصات وسط:

$$M\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_A+x_B}{2}\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B}{2}\\[2mm]\dfrac{z_A+z_B}{2}\end{array}\right.$$



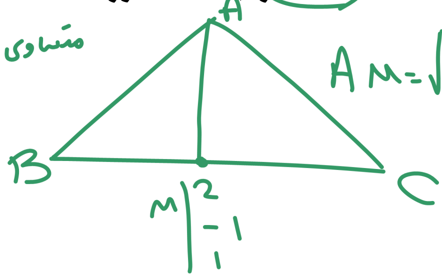
مثال ۷ : نقطه‌ای به طول ۱- و به ارتفاع ۵ در صفحه‌ی XOZ قرار دارد و نقطه‌ی دیگری روی محور yها به عرض ۲- است، فاصله ا ین دو نقطه از هم را بیابید.

$A(-1,0,5)$
$B(0,-2,0) \Rightarrow AB=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}$

مثال ۸ : سه نقطه به مختصات A(۲,−۱,۳) و B(۱,۰,۲) و C(۳,−۲,۴) سه رأس یک مثلث هستند نوع مثلث و محیط آن را تعیین کنید. میانه AM را به دست آورید.

$AB=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$
$AC=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$
$BC=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

متساوی الساقین



$M\begin{vmatrix}2\\-1\\1\end{vmatrix}$

$AM=\sqrt{0+0+4}=2$

$(2\sqrt{3})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2$ ✗

مثال ۹ : اگر A و B دو نقطه در فضای R^3 به مختصات (−۱,۲,۴) و (۳,−۴,۶) باشند فاصله نقطه‌ی وسط پاره خط AB را از مبدأ مختصات بیابید؟

$M\begin{vmatrix}1\\-1\\5\end{vmatrix} \quad O\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \quad OM=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$

مثال ۱۰ : اگر طول، عرض، ارتفاع اتاقی ۴ و ۵ و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطه متقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.

مثال ۱۱ : نقاطی روی صفحه‌ی xoy بیابید که طولشان دو برابر عرضشان بوده و از نقطه‌ای به طول ۴ روی محور xها به فاصله‌ی $\sqrt{۲۱}$ باشد.

$(x, y, 0) \longrightarrow A(2y, y, 0)$

$B(4, 0, 0)$

$AB = \sqrt{(2y-4)^2 + y^2} = \sqrt{21}$

$4y^2 - 16y + 16 + y^2 = 21$

$\boxed{5y^2 - 16y - 5 = 0}$

معادلات خط و نقطه و صفحه:

صفحه‌ی $z = ۴$ موازی صفحه ....xoy.... است.

عمود بر xها

صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(۲, -۱, ۳)$ و موازی با صفحه‌ی yoz، ....$x=2$.... است.

صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(۳, -۱, ۲)$ و موازی با صفحه‌ی xoz، ....$y=-1$.... است.

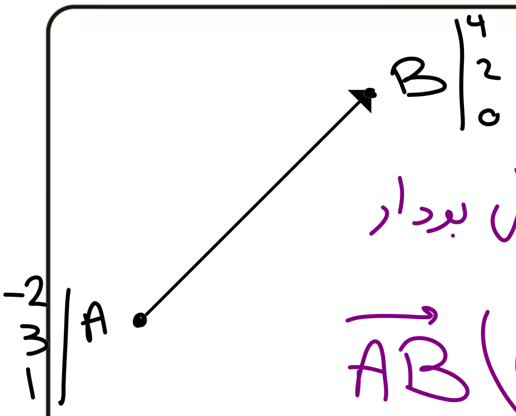
صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $(۱, -۱, ۲)$ و عمود بر محور zها ....$z=2$.... است.

خط به معادله‌ی $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ بر صفحه‌ی xoz عمود است. X

خط به معادله‌ی $\begin{cases} x = ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$ خطی موازی محور .... است.

ساختن یک بردار:

$\overrightarrow{AB} =$ انتها - ابتدا



طول بردار: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\text{دونه به دونه مؤلفه‌هاش به توان دو}}$

$\overrightarrow{AB}(6, -1, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38}$

ضرب داخلی $\vec{a}\cdot\vec{b} \longrightarrow$ عدد

ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b} \longrightarrow$ بردار

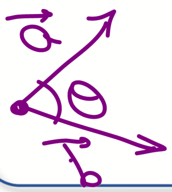
ضرب داخلی

$\vec{a}(2, -3, 4)$

$\vec{b}(4, -1, 2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 8+3+8 = 19$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ مختصات داریم / مختصات نداریم



$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ضرب داخلی‌شون}}{\text{ضرب اندازه‌هاشون}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

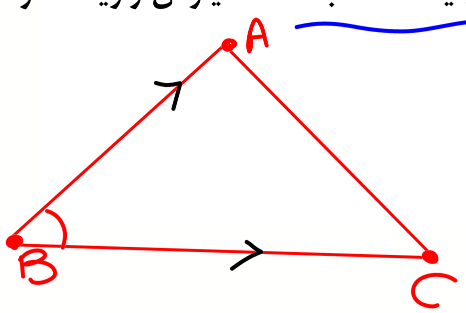
مثال ۱۳: اگر $\vec{a}(2,-1,3)$، $\vec{b}(3,1,-2)$ باشد کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$، $-2\vec{a}$ را بیابید.

$\vec{c} = \vec{a}+\vec{b} = (5, 0, 1) \longrightarrow |\vec{c}| = \sqrt{25+0+1} = \sqrt{26}$

$\vec{d} = -2\vec{a} = (-4, 2, -6) \longrightarrow |\vec{d}| = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56}$

$\cos\theta = \dfrac{-20+0-6}{\sqrt{26}\times\sqrt{56}} = \dfrac{-26}{\sqrt{26}\times\sqrt{56}}$

مثال ۱۴: اگر سه نقطه‌ی $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(3,1,-2)$ سه رأس یک مثلث باشند کسینوس زاویه $\hat{B}$ را بیابید.



$\overrightarrow{BA}(1, 2, 1) \longrightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC}(1, 0, -3) \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$\cos\hat{B} = \dfrac{1+0-3}{\sqrt{6}\times\sqrt{10}} = \dfrac{-2}{\sqrt{60}}$

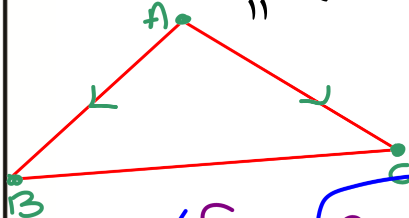
مثال ۱۵: اگر $|a|=۴$ ، $|b|=۶$ و زاویه بین آن‌ها ۱۵۰° باشد، $\vec{a}.\vec{b}$ را بیابید.

$-\cos 30$

$\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta \quad (150)$

$= \cancel{4}^{2} \times 6 \times -\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = -12\sqrt{3}$

مثال ۱۶: سه نقطه‌ی $A(۲,۱,۰)$ ، $B(-۱,۲,۱)$ ، $C(m,-۲,۳)$ رئوس یک مثلث باشند و $\cos A = \frac{-۳\sqrt{۲}}{۱۱}$ است مقدار m را بیابید.



$\vec{AB}(-3,1,0) \to \sqrt{9+1+0}$

$\vec{AC}(m-2,-3,3) \to \sqrt{(m-2)^2+9+9}$

$\cos A = \frac{-3\sqrt{2}}{11} = \frac{\boxed{-3m+6-\cancel{3}}\,{}^{+3}}{\sqrt{10} \times \sqrt{(m-2)^2+18}} \quad 3(-m+1)$

$\frac{2}{121} = \frac{(-m+1)^2}{10((m-2)^2+18)}$

مثال ۱۷: بردارهای $\vec{a}(۳,-۴,m)$ ، $\vec{b}(۴,۳,m)$ با هم زاویه ۶۰° می‌سازند، مقدار m مثبت کدام است؟

$\cos 60 = \frac{a.b}{|a||b|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\cancel{12}-\cancel{12}+m^2}{\sqrt{25+m^2} \times \sqrt{25+m^2}} \Rightarrow 2\cancel{m^2} = \cancel{m^2}+25$

$m = \pm 5$

$m=5$

$|a| = |b| = \sqrt{16+9+m^2}$

مثال ۱۸: در متوازی الاضلاعی که بردارهای $\vec{a} = ۲i + ۳j + ۴k$ و $\vec{b} = ۵i + ۲k$ بنا می‌شود زاویه بین دو قطر را بیابید.

$i \to x$

$j \to y$

$k \to z$

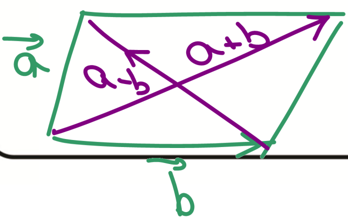
$\vec{a}(2,3,4)$

$\vec{b}(5,0,2)$

$\vec{c} = a+b \; (7,3,6)$

$\vec{d} = \vec{a}-\vec{b} \; (-3,3,2)$

$\cos\theta = \frac{-21+9+12}{|c||d|} = 0 \to \boxed{\theta = 90^\circ}$



1) $a \perp b \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |a||b|\boxed{\cos 90^\circ} = 0$

2) $\vec{a}.\vec{a} = |a|^2 \Rightarrow \vec{a}.\vec{a} = |a||a|\cos 0^\circ = |a|^2$

$\theta = 90 \to a.b = 0$

3) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

4)

$\theta < 90 \to a.b > 0$

$\theta > 90 \to a.b < 0$

$\theta = 180 \to a.b = -|a||b|$

مثال ۱۹ : اگر $|a|=۳$ و $|b|=۲$ و زاویه بین آن‌ها ۱۲۰° باشد، حاصل $(۳a-b)(۲a+۳b)$ را بیابید.

$6|a|^2+\underbrace{9a.b-2b.a}_{7a.b}-3|b|^2$

$=6\times3^2+7\times3\times\cancel{2}\times(-\frac{1}{\cancel{2}})-3\times2^2$

$=54\underbrace{-21}_{-33}-12=21$

$|a|=3 , |b|=4$

مثال ۲۰ : اگر اندازه‌ی دو بردار a و b به ترتیب ۳ و ۴ و زاویه بین آن‌ها ۶۰° باشد، اندازه‌ی بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ چقدر است؟

$b.b$

$(\vec{c})^2=(2\vec{a}-\vec{b})^2$

$|c|^2=4|a|^2-4a.b+|b|^2$

$=\underbrace{4\times3^2}_{36}-\underbrace{\cancel{4}^2\times3\times4\times\frac{1}{\cancel{2}}}_{24}+\underbrace{4^2}_{16}$

$|c|^2=28\longrightarrow|c|=\sqrt{28}$ ✓

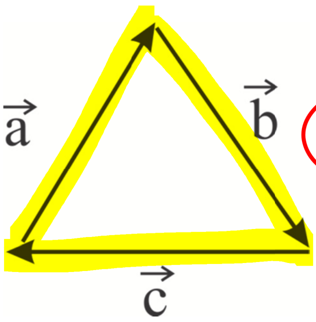
مثال ۲۱ : اگر $\vec{a}=(m,۲,-۱)$، $|\vec{b}|=\sqrt{۴۱}$ باشد و دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ ، $\vec{a}-\vec{b}$ بر هم عمود باشند، m را بیابید.

$(a+b).(a-b)=0\Rightarrow|a|^2-|b|^2=0$

$|a|^2=|b|^2\Rightarrow|a|=|b|\Rightarrow\sqrt{m^2+4+1}=\sqrt{41}$

$m^2+5=41\longrightarrow m^2=36\longrightarrow m=\pm6$

مثال ۲۳: در شکل زیر اندازه‌ی بردارهای a و b و c به ترتیب ۳، ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟



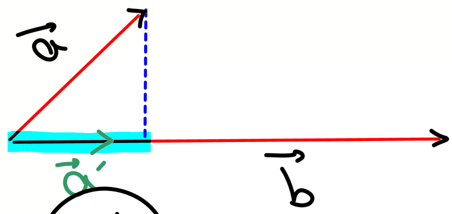
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$(\vec{a}+\vec{b})^2=(-\vec{c})^2$

$\underbrace{|a|^2}_{9}+2a\cdot b+\underbrace{|b|^2}_{25}=\underbrace{|c|^2}_{36}$

$2a\cdot b=2 \to \boxed{a\cdot b=1}$

تصویر قائم بردار a روی بردار b



$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|^2}\vec{b}$$

تصویر قائم C روی d

$$\vec{C}'=\frac{c\cdot d}{|d|^2}\cdot d$$

مثال ۲۴: اگر $\vec{a}(۳,-۱,۲)$ و $\vec{b}(-۲,۳,-۳)$ باشد، بردار تصویر قائم:

۱) $\vec{a}$ روی $\vec{a}-\vec{b}$

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}(5,-4,5) \to |c|=\sqrt{25+25+16}=\sqrt{66}$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|c|^2}\cdot\vec{c}$$

$$\vec{a}'=\frac{15+4+10}{66}(5,-4,5)=\frac{29}{66}(5,-4,5)$$

۲) $\vec{a}+۲\vec{b}$ روی $-۲\vec{b}$

$d=\vec{a}+2\vec{b}(-1,5,-4)$

$e=-2\vec{b}(4,-6,6) \to |e|=\sqrt{36+36+16}$

$$d'=\frac{\vec{e}\cdot\vec{d}}{|\vec{e}|^2}\cdot\vec{e}$$

$$=\frac{-4-30-24}{88}(4,-6,6)$$

مثال ۲۸ : اگر $\vec{a}(3,m-1,2)$ و $\vec{b}(-1,2,-1)$ باشند و داشته باشیم $a+b \perp a-b$ در این صورت تصویر قائم بردار $a+2b$ بر امتداد بردار $C=2i-j$ را بیابید.

$a+b(2, m+1, 1)$

$a-b(4, m-3, 3)$

$8+m^2-2m-\cancel{3}+\cancel{3}=0$

$\boxed{m^2-2m+8=0}$

$\Delta<0 \rightarrow$ ریشه ندارد $\rightarrow$ m نداریم!

ضرب خارجی: دو بردار ، برداری عمود بر هر دو بردار است.

$\vec{a} \times \vec{b}$ $\xrightarrow{\text{مختصات داریم}}$

$\vec{a}(2,-1,3)$

$\vec{b}(1,-1,2)$

$\vec{a}\times\vec{b}(1,-1,-1)$

$-2-(-3)$

$-2-(-1)$

$\xrightarrow{\text{نداریم}}$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|a||b|\sin\theta$

نکات ضرب خارجی

$|\vec a\times\vec b| = |\vec b\times\vec a|$

۱) جا به جایی نداریم: $\vec a\times\vec b \neq \vec b\times\vec a$

۲) $\vec a\times\vec b = -\vec b\times\vec a$

۳) اگر دو بردار با هم موازی باشند یا در راستای هم باشند ضرب خارجی آن‌ها صفر است.

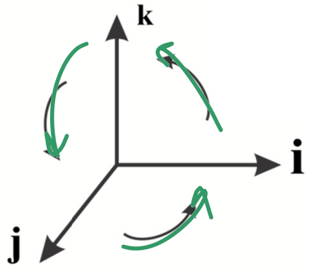
اثبات:

$|\vec a\times\vec b| = |\vec a||\vec b|\cancel{\sin 0} = 0$

$a\cdot(a\times b) = 0$

۴) $a.(a\times b)$ برابر صفر است.

۵)

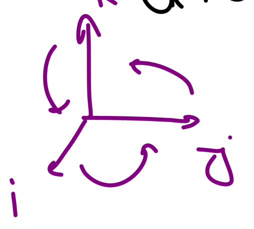


پادساعتگرد

۶)

مثال ۲۹ : جاهای خالی را پر کنید.

$\vec{k}\ \vec{a}.\vec{a} = 0$



۱) اگر دو بردار با هم موازی باشند ضرب خارجی بین آن‌ها، ....0......... است.

۲) حاصل $\mathbf{a}.(2\mathbf{a}\times\mathbf{b})$، ....0......... است.

۳) حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش ....0......... است.

۴) حاصل $\mathbf{i}\times(\underbrace{\mathbf{j}\times\mathbf{k}}_{})$ (i)، ....0......... است.

۵) حاصل $\boxed{(\mathbf{i}\times\mathbf{j})}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{i})$ ($k \times j$)، ....$-i$......... است.

۶) در حالتی که زاویه بین دو بردار ....90°......... است، ضرب خارجی بیشترین حالت ممکن را دارد.

$-1-(-2)$

۷) حاصل ضرب ....خارجی......... برداری عمود بر هر دو بردار است.

$(3,1,2)$

۸) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a},\vec{b}$ بر صفحه‌ی شامل آن دو بردار، ....عمود......... است.

$-3-4$

$(2,-1,-1)$

۹) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جا به جایی ....ندارد......... .

$(1,+7,-5)$

۱۰)اگر $\vec{a}(3,1,2)$ و $\vec{b}(2,-1,-1)$ باشد برداری عمود بر هر دو بردار ....است.

۱۱)اگر $|\mathbf{a}|=3$ و $|\mathbf{b}|=5$ و زاویه بین دو بردار 150° باشد حاصل $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$، ....$7{,}5$......... است.

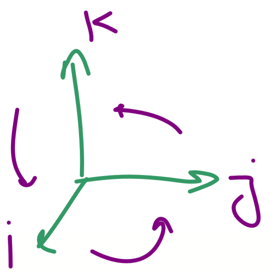
$|a||b|\sin 150 = 3\times 5\times \frac{1}{2}$

مثال ۳۰ : درست و نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید:

۱) حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک عدد حقیقی است.

۲) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند، داریم: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$

۳) ضرب خارجی دو بردار خاصیت جا به جایی ندارد.



۴) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ آنگاه $\vec{b}=\vec{c}$

۵) اگر دو بردار بر هم عمود باشند $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

۶) اگر k, i, j سه بردار یکه باشند، داریم: $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

مثال ۳۴ : اگر $A(۳,۱,-۱)$ و $B(۰,۰,-۲)$ و $C(۲,۲,-۲)$ سه نقطه در فضای $R^۳$ باشند طول بردار تصویر قائم $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ را روی $\overrightarrow{AC}$ بیابید.

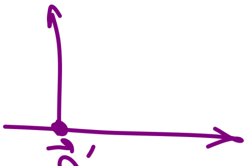
$\overrightarrow{AB}(-3,-1,-1)$

$\overrightarrow{BC}(2,2,0)$

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}(2,-2,-4)$

$\vec{b}=\overrightarrow{AC}(-1,1,-1)$

$\vec{a}'=\frac{-2-2+4}{\quad}=0$



$\vec{a}'=0$

مثال ۳۵ : اگر $|a|=۲$، $|b|=۴$، $|a\times b|=۶$ باشد حاصل $a.b$ را بیابید.

$|a\times b|=6 \rightarrow 2\times4\times\sin\theta=6 \rightarrow \sin\theta=\frac{3}{4}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\vec{a}.\vec{b}=2\times4\times\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\pm2\sqrt{7}$

مثال ۳۶ : اگر $|a|=۳$ و $|b|=۲$، $|\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a})|=۴$ باشد $a.b$ را بیابید.

$|a\times(b-a)|=4$

$a\times b-\cancel{a\times a}=4$

$3\times2\times\sin\theta=4$

$\sin\theta=\frac{2}{3}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$a.b=3\times2\times\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\pm2\sqrt{5}$

مثال ۳۷ : $|a\times b|=\sqrt{۳}a.b$ باشد زاویه بین دو بردار را بیابید.

$\frac{|a\times b|}{a.b}=\frac{\cancel{|a||b|}\sin\theta}{\cancel{|a||b|}\cos\theta}=\tan\theta$

$\rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}\rightarrow\theta=60^\circ$

مثال ۳۸ : ثابت کنید $(a.b)^2 + |a\times b|^2 = |a|^2 .|b|^2$.

$(a.b)^2 + |a\times b|^2$

$|a|^2|b|^2\cos^2\theta + |a|^2|b|^2\sin^2\theta$

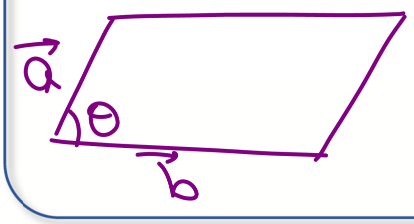
$= |a|^2|b|^2(\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) = |a|^2|b|^2$

1

مثال ۳۹ : اگر $|a| = 3$ ، $|b| = 6$ و $a.b = 10$ باشد حاصل $|a \times b|$ را بیابید.

مساحت مثلث و متوازی الاضلاع:

۱. مساحت مثلث $= \frac{1}{2}|a\times b|$



$S = |a||b|\sin\theta = |\vec a \times \vec b|$

$10 - (-8)$

$-2-2$

مثال ۴۰ : اگر $\vec a(2,-1,2)$ و $\vec b(3,-1,0)$ باشد مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار $\boxed{\vec a + \vec b}$ و $\boxed{\vec a - 2\vec b}$ را بیابید.

$\vec c = \vec a + \vec b = (5,-2,2)$

$\vec d = \vec a - 2\vec b = (-4,1,2)$

$\vec c \times \vec d\ (-4,-18,-3)$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{16+324+9}$

25

$= \frac{1}{2}\sqrt{349}$ ✓

$\cos\hat{B} = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|BA||BC|}$

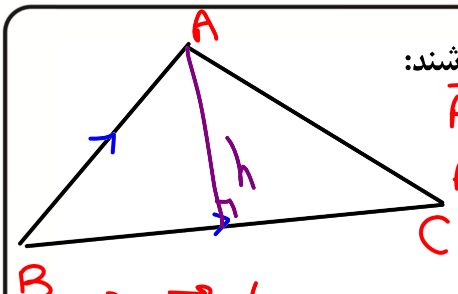
مثال ۴۱ : اگر $A(-3,-1,2)$ و $B(-2,2,1)$، $C(1,1,-2)$ سه راس یک مثلث باشند:

الف) مساحت این مثلث را بیابید.

ب) کسینوس زاویه $\hat{B}$ را بیابید.

ج) طول ارتفاع وارد بر BC را بیابید.

مهم



$\vec{AB}(1,3,-1)$

$\vec{AC}(4,2,-4)$

$\vec{AB}\times\vec{AC}\,(-10,-0,-10)$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{100+0+100}=5\sqrt{2}$

$|BC|=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}$

$S=\frac{1}{2}h\times|BC|$

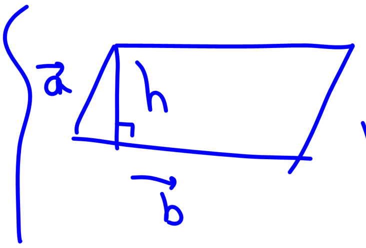
$5\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times h\times\sqrt{19}$

$h=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

مثال ۴۲ : اگر روی $\vec{a}(1,-2,3)$، $\vec{b}(2,-1,1)$ متوازی الاضاعی بنا شود ارتفاع این متوازی الاضلاع را بیابید.

$S=\sqrt{35}=h.\cancel{|\vec{b}|}\sqrt{6}\rightarrow h=\sqrt{\frac{35}{6}}$

$(1,-2,3)$
$(2,-1,1)$
$(1,+5,3)$



$|\vec{b}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

مثال ۴۳ : اگر $|a|=2$ و $|b|=3$ و $a.b=4$ باشد. مساحت مثلث ساخته شده روی دو بردار a, b را بیابید.

$S=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

$4=2\times3\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

مثال ۴۴ : اگر $\vec{a}(2,-1,1)$ ، $\vec{b}(0,1,-1)$ باشند مساحت مثلثی که روی $\vec{a}\times\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ ساخته می‌شود را بیابید.

$\vec{C}=\vec{a}\times\vec{b}$ $(2,-1,1)$ $(0,1,-1)$

$\vec{C}$ $(0,+2,2)$

$a+b=\vec{d}$ $(2,0,0)$

$(0,+4,-4)$

$S=\frac{1}{2}|C\times d|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{0+16+16}=2\sqrt{2}$

مثال ۴۵ : اگر a و b دو بردار به ترتیب با طول‌های ۳ و ۴ باشند و با هم زاویه 150° داشته با شند مساحت مثلث بنا شده روی دو بردار $3\vec{a}+2\vec{b}$ و $2\vec{a}-\vec{b}$ را بیابید.

$S=\frac{1}{2}|(3a+2b)\times(2a-b)|$

$=\frac{1}{2}|\overset{0}{\cancel{6a\times a}}\underbrace{-3a\times b}_{+3b\times a}+4b\times a-\overset{0}{\cancel{2b\times b}}|=\frac{1}{2}\times 7|b\times a|$

$=\frac{7}{2}\times 3\times 4\times\frac{1}{2}=21$

حجم متوازی السطوح:

ضرب مختلط سه تابردار $V=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$

$|b.(\vec{a}\times\vec{c})|=|$ دترمینان 3x3 $|$

مثال ۴۷: اگر $\vec{a}(2,-1,3)$، $\vec{b}(1,1,-2)$، $\vec{c}(1,-2,1)$ سه بردار باشند حجم متوازی السطوح بنا شده روی سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ ، $\vec{c}$ را بیابید.

$$V=|a\cdot(b\times c)|=\left|\begin{matrix}2&-1&3\\1&1&-2\\1&-2&1\end{matrix}\right|$$

$$=(\underbrace{2+2-6}_{-2})-(\underbrace{3+8-1}_{10})=-12\rightarrow \text{حجم}=12$$

مثال ۴۸: اگر $\vec{a}(2,-3,1)$، $\vec{b}(1,2,-4)$ باشند حجم متوازی السطوح بنا شده روی سه بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را بیابید.

$(2,-3,1)$
$(1,2,-4)$
$a\times b(10,9,7)$

$$V=|c\cdot\underbrace{(a\times b)}_{c}|=|c|^2=\sqrt{100+81+49}^{\,2}=230$$

مثال ۴۹: اگر روی سه بردار $a=2i-j$ و $b=j+3k$ و $c=4i-k$ یک متوازی السطوح ساخته شود، اگر قاعده‌های این متوازی السطوح a,b باشند ارتفاع متوازی السطوح را بیابید.

$V=\text{قاعده}\ S\times h \Rightarrow 14=7\times h$, $h=2$

$$V=\left|\begin{matrix}2&-1&0\\0&1&3\\4&0&-1\end{matrix}\right|=(-2-12+0)=-14$$

$S=|a\times b|=\sqrt{9+36+4}=7$
$(2,-1,0)$
$(0,1,3)$ $\Rightarrow(-3,-6,2)$

مثال ۵۰: اگر سه بردار $\vec{a}(2,m,1)$ و $\vec{b}(2,-1,3)$ و $\vec{c}(1,1,-1)$ هم صفحه باشند m را بیابید.

$$V=0\Rightarrow\left|\begin{matrix}2&m&1\\2&-1&3\\1&1&-1\end{matrix}\right|=0\rightarrow(2+3m+2)-(\underbrace{-1+6-2m}_{-2m+5})=0$$

$3m+4+2m-5=0$
$5m=1\rightarrow m=\frac{1}{5}$

مثال ۵۱: اگر چهار نقطه‌ی $A(1,1,2)$ و $D(1,1,3)$ و $C(2,0,1)$ و $B(1,m,0)$ در یک صفحه باشند m را بیابید.

$\vec{AB}(0,m-1,-2)$
$\vec{AC}(1,-1,-1)$
$\vec{AD}(0,0,1)$

$$\Rightarrow\left|\begin{matrix}0&m-1&-2\\1&-1&-1\\0&0&1\end{matrix}\right|=0$$

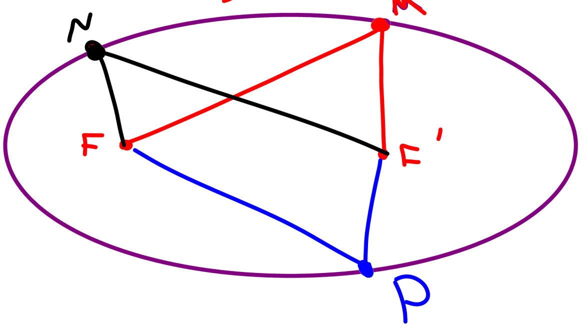
$(0+0+0)-(0+0+m-1)=0$

$m=1$

بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت به یک اندازه است

یا اندازه ی ثابتی دارد. برابر قطر بزرگ.



$\underbrace{MF+MF'}_{2a} = \underbrace{NF+NF'}_{2a} = \underbrace{PF+PF'}_{2a} = \dots$

$\boxed{MF+MF'=2a} \Rightarrow MF+MF'=AF+AF'=a-\cancel{c}+a+\cancel{c}=2a$

$\triangle BOF \cong \triangle BOF' \Rightarrow BF=BF'$

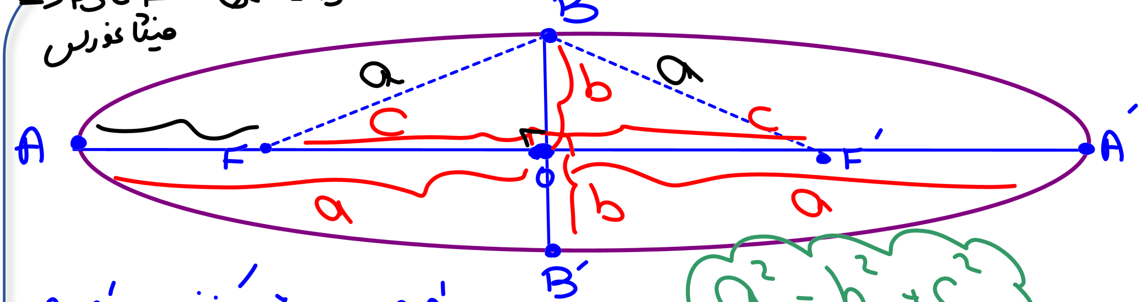
فرض

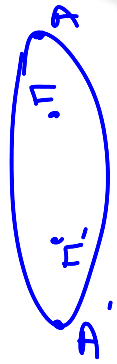
$\Rightarrow MF'+MF=2a \Rightarrow MF'+MF=BF+BF'=2a \Rightarrow BF=BF'=a$

شناخت بیضی

$\Rightarrow \triangle BOF: a^2=b^2+c^2$

فیثاغورس





$A, A' \to$ رئوس کانونی $\Rightarrow AA'=2a$

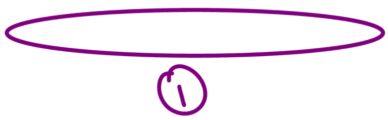
$F, F' \to$ کانون $\Rightarrow FF'=2c$

$B, B' \to$ رئوس غیر کانونی $\Rightarrow BB'=2b$

$a^2=b^2+c^2$

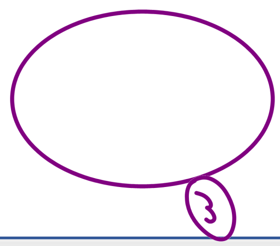
هر چقدر خروج از مرکز کوچکتر باشد بیضی تپل تر یا به دایره شبیه تر است و هر چقدر بزرگتر باشد یا به اندازه دیگر که باشد بیضی کشیده تر است

خروج از مرکز : $e=\frac{c}{a}$



①

②



③

$0<e<1$

$e_1>e_2>e_3$

دایره $e=0$

خط $e=1$

مثال ۱ : جاهای خالی را پر کنید:

۱) هر چقدر بیضی به خط نزدیکتر باشد خروج از مرکز ....بزرگتر........ می‌شود.

۲) خروج از مرکز خط، ....1........ است.

۳) خروج از مرکز دایره، ....0........ است.

۴) خروج از مرکز بیضی به اقطار ۴ و ۶، ....$\frac{\sqrt{5}}{3}$........ است.

۵) اگر قطر بزرگ بیضی ۴ برابر فاصله کانونی باشد خروج از مرکز ....$\frac{1}{4}$........ است.

۶) در یک بیضی اگر فاصله کانونی با قطر کوچک برابر باشد خروج از مرکز، ....$\frac{1}{\sqrt{2}}$........ است.

$2b=4 \to b=2$

$2a=6 \to a=3$

$9=4+c^2 \to c=\sqrt{5}$

$e=\frac{c}{a}$

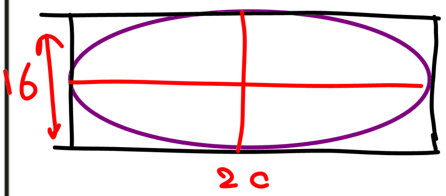
$2a=4\times 2c$

$a=4c \to \frac{c}{a}=\frac{1}{4}$

$e=\frac{c}{a}$

$2b=2c \to b=c \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \to a^2=2c^2 \to a=\sqrt{2}\,c$

مثال ۲ : بیضی با قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ در مستطیلی که ضلع‌هایش موازی قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی است محاط شده، محیط این مستطیل را بیابید.



$2a=20 \to a=10$

$2c=12 \Rightarrow c=6 \Rightarrow 100=36+b^2 \to b=8$

محیط $=2(20+16)=72$

مثال ۳: خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{۴}$ است، نسبت طول قطر بزرگ به قطر کوچک را بیابید.

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=4c$

$a^2=b^2+c^2$

$16c^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=15c^2 \to b=\sqrt{15}\,c$

$\frac{a}{b}=\frac{4c}{\sqrt{15}\,c}=\frac{4}{\sqrt{15}}$

مثال ۴: قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک است، خروج از مرکز را بیابید.

$\frac{a}{b}=2 \Rightarrow a=2b$

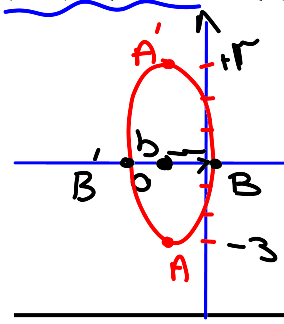
$a^2=b^2+c^2$

$4b^2=b^2+c^2 \to c^2=3b^2 \to c=\sqrt{3}\,b$

$e=\frac{\sqrt{3}\,b}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال ۵: در بیضی به رئوس کانونی (۱,۳) ، (−۱,−۳) با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ مختصات کانون و مختصات دو سر قطر کوچک را بیابید.

A, A'



$AA' = 2a = 6 \rightarrow \boxed{a=3}$

$\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{c=1}$

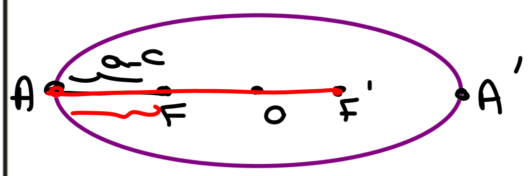
$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = b^2 + 1$

$b = \sqrt{8}$

$B\begin{vmatrix} -1+\sqrt{8} \\ 0 \end{vmatrix}$ $B'\begin{vmatrix} -1-\sqrt{8} \\ 0 \end{vmatrix}$

مثال ۶: اگر A(۱,۳) یک سر قطر بزرگ و F(۱,۲) کانون نزدیک به آن باشد و خروج از مرکز ۰/۸ باشد، قطر کوچک را بیابید.



$a - c = AF = 1 \Rightarrow a - c = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Longrightarrow c = 4, \quad a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2$

$b = 3 \rightarrow 2b = 6$

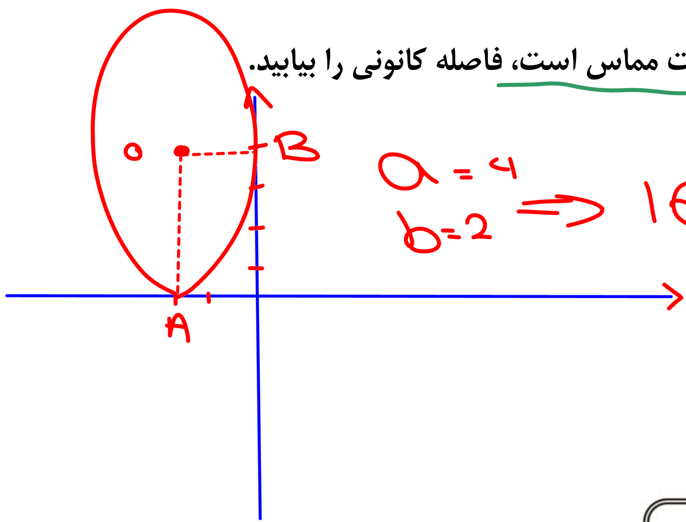
مثال ۷: در یک بیضی اگر فاصله یک سر قطر بزرگ از کانون دورتر ۴ برابر فاصله‌ی آن تا کانون نزدیک باشد، خروج از مرکز را بیابید.

$AF' = 4AF \Rightarrow a + c = 4(a - c)$

$a + c = 4a - 4c \Rightarrow 3a = 5c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

مثال ۸: بیضی به مرکز (−۲,۴) به محورهای مختصات مماس است، فاصله کانونی را بیابید.

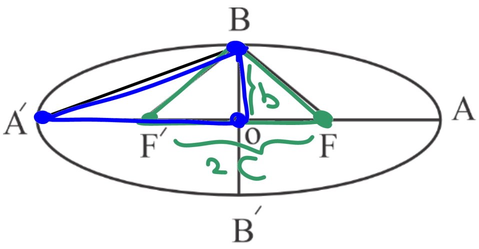
بیضی در رئوس خود به محورها مماس است.



$a = 4$, $b = 2 \Rightarrow 16 = 4 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{12}$

$FF' = 2\sqrt{12}$

مثال ۹ : یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است اگر $4S_{FBF'}=S_{BA'O}$ باشد خروج از مرکز را بیابید.



$$\frac{S_{FBF'}}{S_{BA'O}}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{b}\times 2c}{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{b}\times a}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{8}=e$$

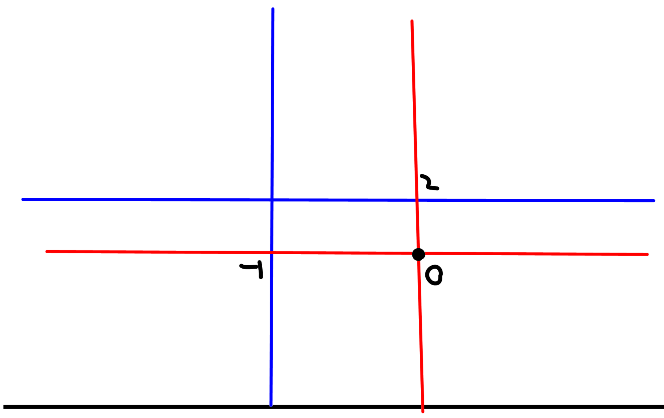
مثال ۱۰: نقاط $B(-1,2)$ و $B'(-1,-4)$ دو سر قطر کوچک‌اند با فاصله کانونی $2\sqrt{3}$ است. طول قطر بزرگ را بیابید.

$BB'=2b=6 \to b=3$

$FF'=2c=2\sqrt{3} \to c=\sqrt{3}$

$a^2=9+3 \to a=\sqrt{12} \to AA'=2\sqrt{12}$

مثال ۱۱: معادله قطر کانونی یک بیضی $y=-1$ و معادله قطر کوچک $x=2$ است، اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ باشد، مرکز بیضی و فاصله کانونی را بیابید.



$O(2,-1)$

$a=6$

$b=4$

$36=16+c^2 \to c=\sqrt{20}$

$2c=2\sqrt{20}$

مثال ۱۲: اگر در یک بیضی طول قطر بزرگ ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد فاصله رأس A تا کانون نزدیکتر را بیابید.

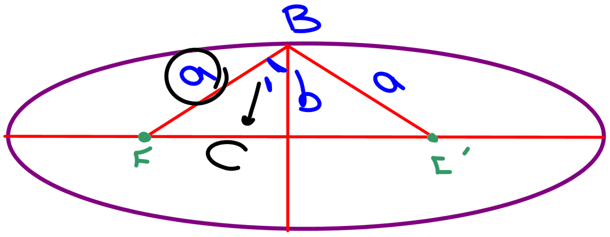
$a-c=8-6=2\checkmark$

$2a=16 \to a=8$

$e=\frac{c}{\cancel{a}\,8}=\frac{3}{4}$

$\boxed{c=6}$

مثال ۱۳: در یک بیضی اگر قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک باشد زاویه $F\hat{B}F'$ را بیابید.



$\frac{2a}{2b} = 2 \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

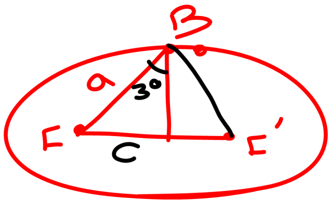
$\cos \hat{B}_1 = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ$

$\Rightarrow F\hat{B}F' = 120^\circ$

مثال ۱۴: در یک بیضی طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر قطر بزرگ است، زاویه $F\hat{B}F'$ را بیابید؟

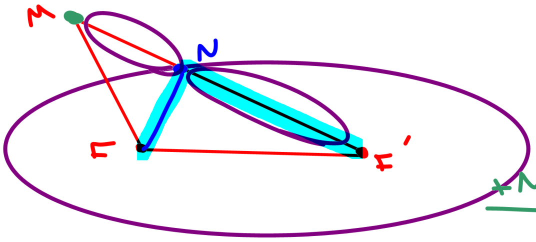
$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \hat{B}_1 \longrightarrow \hat{B}_1 = 30^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 60^\circ$

مثال ۱۵: در یک بیضی اگر زاویه $F\hat{B}F' = 60^\circ$ باشد خروج از مرکز را بیابید.



$e = \frac{c}{a} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

مثال ۱۶: ثابت کنید اگر نقطه‌ی M خارج از بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون بزرگ‌تر از قطر بزرگ است؟



حکم: $MF + MF' > 2a$

$\Rightarrow MF + MN > NF$

$\xrightarrow{+NF'} MF + MN + NF' > \boxed{NF + NF'}$

$MF + MF' > 2a$ ✓

مثال ۱۷: ثابت کنید اگر نقطه‌ی M درون بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون کمتر از قطر بزرگ است؟

مثال ۱۸: نقطه‌ی M(۶,۶) نسبت به بیضی با کانون‌های F(۲,−۵) و F′(۲,۳) و به قطر کوچک ۶ کجا قرار دارد؟

$MF + MF' = \sqrt{(\cancel{6-2})^2+(\cancel{6-3})^2} + \sqrt{(\cancel{6-2})^2+(\cancel{6+5})^2} = 5 + 11,\ldots = 16,\ldots$

$FF' = 2c = 8 \rightarrow c=4$

$b=3 \Rightarrow \boxed{a=5}$

$2a=10$

$MF + MF' > 2a$

بیرون

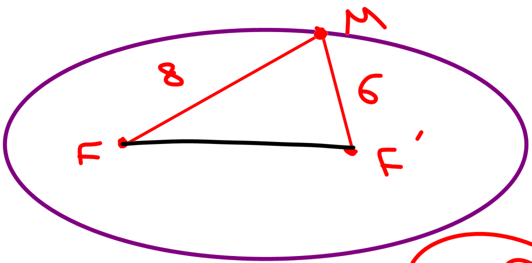
مثال ۱۹: اگر $F\begin{vmatrix}۱\\۵\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}۱\\−۱\end{vmatrix}$ کانون‌های بیضی باشند و M(۴,۲) نقطه‌ای روی آن باشد طول قطر کوچک را بیابید.

$MF + MF' = 2a \Rightarrow \sqrt{(\cancel{4-1})^2+(\cancel{2-5})^2} + \sqrt{(\cancel{4-1})^2+(\cancel{2+1})^2} = 2\sqrt{18}$

$a=\sqrt{18}$; $FF' = 2c = 6 \rightarrow c=3$

$\Rightarrow 18 = 9 + b^2 \rightarrow b=3 \rightarrow 2b=6$

مثال ۲۰: در شکل زیر نقطه‌ی M روی بیضی با کانون‌های F و F′ قرار دارد به طوری که MF=۸ و MF′=۶ اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را بیابید.



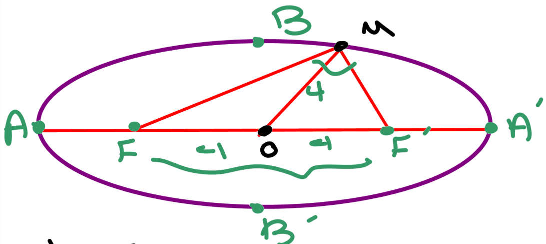
$MF + MF' = 2a = 14 \rightarrow a=7$

$\frac{c}{\cancel{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \boxed{c=1}$

$49 = 1 + b^2 \rightarrow b=\sqrt{48}$

مثال ۲۱: بیضی به اقطار ۶ و ۱۰، نقطه‌ی M روی بیضی است. به طوری که فاصله آن تا مرکز برابر ۴ است، ثابت کنید $\overset{\Delta}{MFF'}$ قائم الزاویه است و فواصل آن را تا کانون‌ها بیابید.

MF , MF′



$MF + MF' = 2a \Rightarrow \boxed{MF + MF' = 10}$ S

$\overset{\Delta}{MFF'}: \quad (MF+MF')^2 = 100$

$\Rightarrow \underbrace{MF^2 + MF'^2}_{64} + 2MF.MF' = 100$

فیثاغورس

$\Rightarrow \boxed{MF.MF' = 18}$ P

$2b=6 \rightarrow b=3$

$2a=10 \rightarrow a=5 \Rightarrow c=4$

می‌دانیم O مرکز است پس OM میانه است
در مثلث قائم الزاویه است که میانه وارد بر وتر نصف
وتر است چون $OM = \frac{1}{2}FF'$ پس مثلث
MFMF′ قائم الزاویه است.

$\Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10+2\sqrt{7}}{2} = 5+\sqrt{7} \\ x_2 = 5-\sqrt{7} \end{cases}$

$\Delta = 100 - 72 = 28$

مثال ۲۲: دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند، A به کانون F' نزدیکتر و B به کانون F نزدیکتر است، اگر $AF' = BF$ باشد نشان دهید:

$AF' + AF = BF + BF' \Rightarrow AF = BF'$

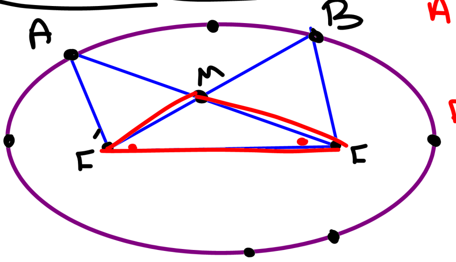
طبق تعریف بیضی

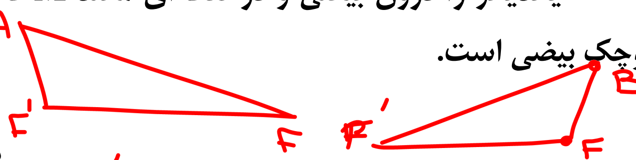
الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند؟

چهارضلعی متوازی‌الاضلاع

$\Rightarrow AF \parallel BF'$

ب) در حالتی که AF، BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث $\overset{\Delta}{FMF'}$ متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



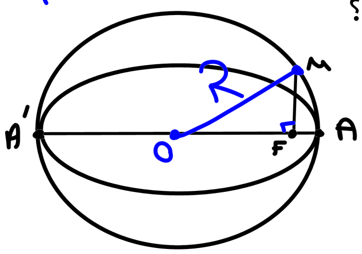


$\left\{\begin{array}{l} AF' = BF \\ AF = BF' \\ FF' = FF' \end{array}\right. \Rightarrow \overset{\Delta}{AF'F} \cong \overset{\Delta}{BFF'} \Rightarrow \hat{F} = \hat{F'}$

ض ض ض

مثال ۲۳: قطر دایره‌ی C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی C است، و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم، تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است؟

$MF = b$

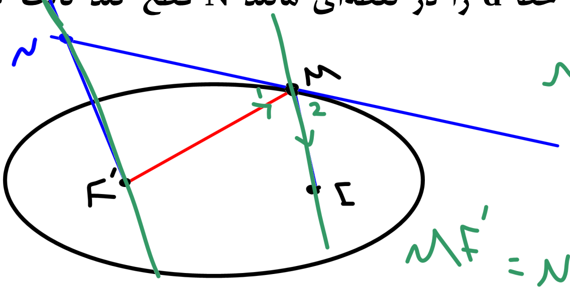


$2R = 2a \Rightarrow R = a$

$\overset{\Delta}{OMF}: \boxed{R^2} = \boxed{c^2} + MF^2$

$\boxed{a^2} = \boxed{c^2} + b^2 \Rightarrow MF = b$ ✓

مثال ۲۴: در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی است، خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M به بیضی مماس باشد، سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسیم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند ثابت کنید $NF' = MF'$.



$NF' \parallel MF \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}$ با مورب

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

$\Rightarrow \hat{N} = \hat{M}_1$

$\overset{\Delta}{NF'M}$ متساوی الساقین $\Rightarrow MF' = NF'$

مثال ۲۷: در یک بیضی مختصات $F(4,0)$ و $F'(-2,0)$ و طول قطر بزرگ برابر ۱۰ است، اگر نقطه‌ی $P(1,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

$$PF + PF' = 10$$

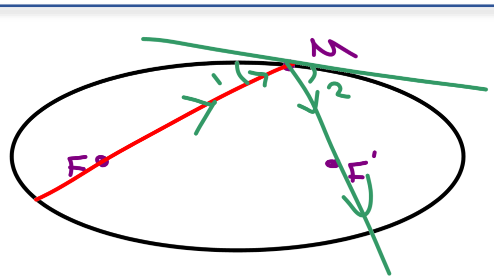
$$\sqrt{(4-1)^2 + m^2} + \sqrt{(-2-1)^2 + m^2} = 10$$

$$2\sqrt{9+m^2} = 10 \rightarrow \sqrt{9+m^2} = 5$$

$$\underbrace{9+m^2}_{25}$$

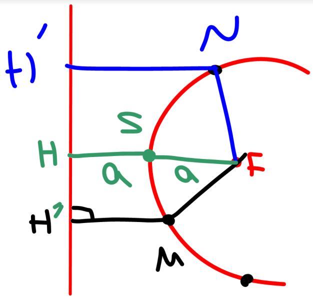
$$m = 4$$

خاصیت بازتابندگی بیضی



* اگر پرتو نوری را از یکی از کانون ها بتابانیم بازتابش آن از آینه کانون دیگر می‌گذرد.

تعریف سهمی



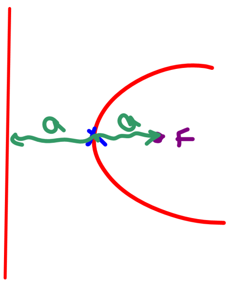
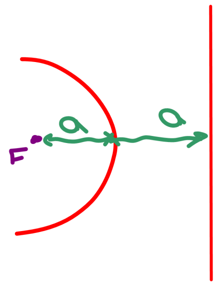
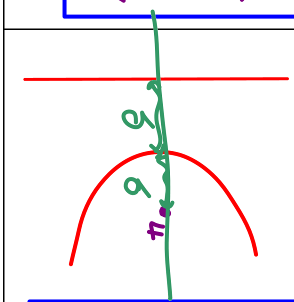
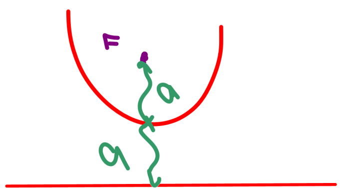
مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از یک نقطه و از یک خط به یک اندازه است.

$MF = MH'$

$NF = NH'$

به F کانون و به آن خط (خط هادی)

$SF = SH \longrightarrow$ پارامتر سهمی $\longrightarrow a$

 $S\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ $F\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{vmatrix}$ خط هادی: $x=\alpha-a$ محور تقارن: $y=\beta$ $\boxed{(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)}$	 $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ $F\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix}$ خط هادی: $x=\alpha+a$ محور تقارن: $y=\beta$ $\boxed{(y-\beta)^2 = -4a(x-\alpha)}$
 $S\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{vmatrix}$ خط هادی: $y=\beta+a$ محور تقارن: $x=\alpha$ $\boxed{(x-\alpha)^2 = -4a(y-\beta)}$	$\boxed{(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)}$  $S\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{vmatrix}$ هادی: $y=\beta-a$ تقارن: $x=\alpha$

① درجه دو مجهول جنس‌ها را نگه دارد و بقیه را به آن طرف ببریم
② ضریب درجه ۱ نصف / توان ۲ ← طرفین اضافه
③ تجزیه اتحاد مربع / ست را از ضریب درجه اول فاکتور
④ استاندارد / S / a مدل :

مثال ۲۹: در هر یک از سهمی‌های زیر، مختصات رأس محور تقارن، مختصات کانون، معادله‌ی خط هادی را بیابید.

۱) $y^2-2y+8x+17=0$

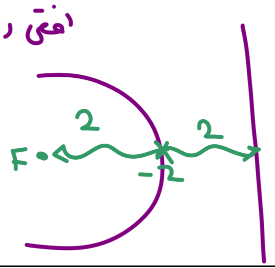
$y^2-2y+1=-8x-17+1$

$(y-1)^2=-8(x+2) \Rightarrow S\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}, a=2$

مدل: افقی رو به منفی

$x=0$

$F\begin{vmatrix}-4\\1\end{vmatrix}$



۲) $y^2-4y-4x+4=0$

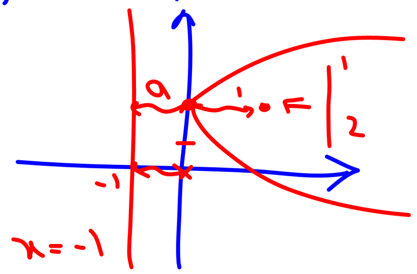
$y^2-4y+4=4x-4+4$

$(y-2)^2=4(x-0) \Rightarrow S\begin{vmatrix}0\\2\end{vmatrix}, a=1$

افقی رو به راست

$F\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$

$x=-1$



۳) $y^2-4x-2=0$

۴) $x^2-2y+4x-12=0$

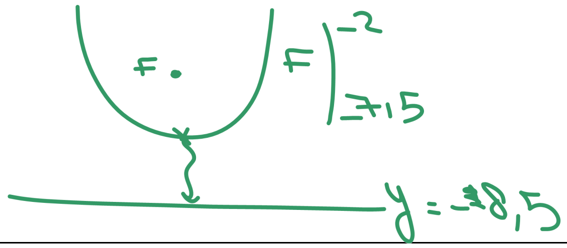
$x^2+4x+4=2y+12+4$

$(x+2)^2=2(y+8) \to S\begin{vmatrix}-2\\-8\end{vmatrix}$

$a=\frac{1}{2}$ عمودی رو به بالا

$F\begin{vmatrix}-2\\-7{,}5\end{vmatrix}$

$y=-8{,}5$



مثال ۳۰: جاهای خالی زیر را پیدا کنید:

$x^2=4y-16$

$x^2=4(y-4)$ $S\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$

$y^2-2y+1=-4x+1$

$(y-1)^2=-4(x-\frac{1}{4})$ $S\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\\1\end{vmatrix}$ $a=1$

الف) رأس سهمی $x^2-4y+16=0$، ....$\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$.......... است.

ب) خط هادی $y^2-2y+4x=0$، .... $x=\frac{5}{4}$ .... است.

ج) معادله سهمی $y^2=-4ax$ است دهانه‌ی این سهمی رو به ....چپ....... و محور سهمی ....محور طول‌ها....... است.

د) معادله سهمی $y=\frac{1}{4a}x^2$ است دهانه‌ی این سهمی رو به ....بالا....... و محور سهمی ....محور عرض‌ها....... است.

مثال ۳۱: سهمی $3y^2-4x+6y+5=0$ را در نظر بگیرید مساحت دایره‌ای به شعاع فاصله‌ی کانون تا خط هادی را بیابید.

$-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$

$2a$

$$\xrightarrow{\div 3} y^2+2y+1-\frac{4}{3}x\ \boxed{-\frac{5}{3}+1}\ -\frac{2}{3}$$

$$(y+1)^2=\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$4a=\frac{4}{3}\to a=\frac{1}{3}\to 2a=\frac{2}{3}\to R=\frac{2}{3}$$

$$S=\frac{4\pi}{9}$$

مثال ۳۲: به ازای کدام مقدار m خط هادی سهمی $y^2-6y+2x+m=0$ از نقطه‌ی $(1,2)$ می‌گذرد؟

$$y^2-6y+9=-2x-m+9$$

$$(y-3)^2=-2\left(x+\frac{m}{2}-\frac{9}{2}\right)$$

$$S\left|\begin{matrix}-\frac{m}{2}+\frac{9}{2}\\ 3\end{matrix}\right.$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$$x=-\frac{m}{2}+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\to 1=-\frac{m}{2}+5\to \boxed{m=8}$$

مثال ۳۳: اگر $S(2,-1)$ رأس سهمی $y^2+ax+by+9=0$ باشد، کانون سهمی را بیابید.

$$\underbrace{y^2+by+\frac{b^2}{4}}=-ax-9+\frac{b^2}{4}$$

$$\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\overset{4}{-a}\left(x+\frac{9}{a}-\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$S\left|\begin{matrix}-\frac{9}{a}+\frac{b^2}{4a}\\ -\frac{b}{2}\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}2\\ -1\end{matrix}\right.$$

$$b=2\to -\frac{9}{a}+\frac{4}{4a}=2$$

$$-\frac{8}{a}=2\to a=-4$$

پارامتر $P=1$

$$S\to F\left|\begin{matrix}3\\ -1\end{matrix}\right.$$

مثال ۳۴: سهمی به معادله‌ی $y^2=2x-4y$ مفروض است، اگر دایره‌ای به مرکز کانون این سهمی و به شعاع ۲ رسم کنید. طول نقطه‌ی برخورد سهمی و دایره را بیابید.

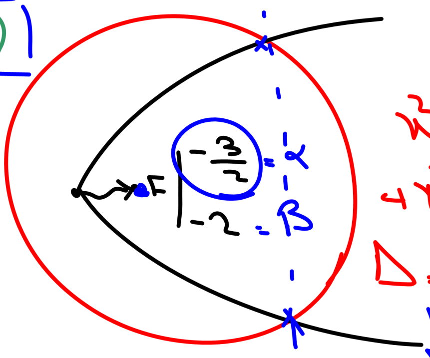
مهم

$y^2+4y+4=2x+4$

$(y+2)^2=2(x+2)$

$S\left|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right.$

$a=\frac{1}{2}$



$(x+\frac{3}{2})^2+(y+2)^2=4$

$(x+\frac{3}{2})^2+2x+\cancel{4}=\cancel{4}$

$x^2+3x+\frac{9}{4}+2x=0$

$4x^2+20x+9=0$

$\Delta=400-144=256$

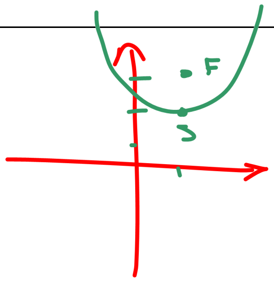
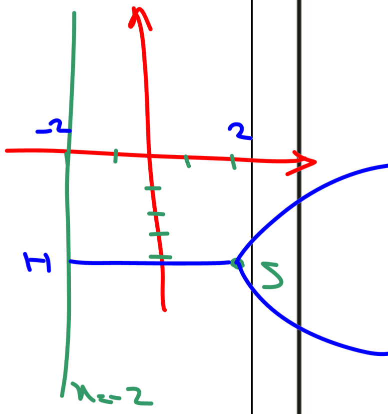
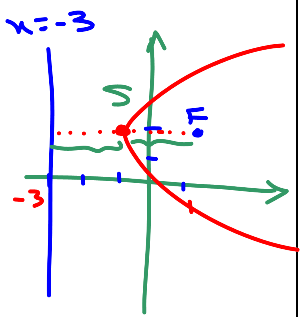
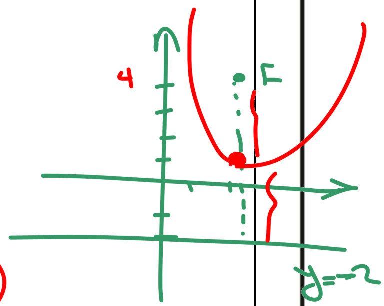
$x_1=\frac{-20+16}{8}=\frac{-1}{2}$ ✓

$x_2=\frac{-20-16}{8}=\frac{-9}{2}$

◄ نوشتن معادله سهمی

برای نوشتن معادله‌ی سهمی، نیازمندیم پارامتر و رأس هستیم،
دقت کنید رأس وسط هادی و کانون است
~ ~ فاصله رأس تا هادی یا فاصله رأس تا کانون برابر a است.
~ ~ کانون همیشه درون سهمی و سهمی هیچ وقت خط هادی خود را قطع نمی‌کند
~ ~ رأس و کانون همواره هم راستا با یکدیگرند.

مثال ۳۶: معادله‌ی هر یک از سهمی‌های زیر را با توجه به اطلاعات داده شده بنویسید.

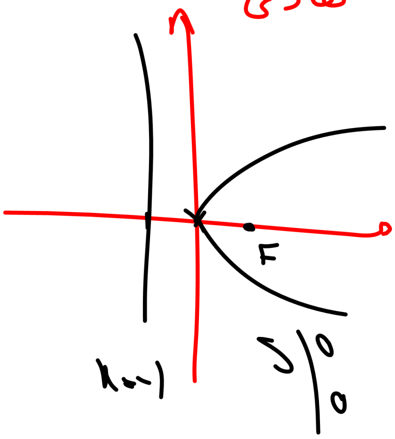
۱) $S(1,2)$, $F(1,3)$ $a = SF = 1$ $(x-2)^2 = 4(y-1)$  	۲) $S(2,-4)$ $x=-2$ $a = SH = 4$ $(y+4)^2 = 16(x-2)$ 
۳) $F(1,2)$ $x=-3$ $S\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$, $a=2$ $(y-2)^2 = +8(x+1)$  	۴) $F(2,4)$ $y=-2$ $S\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$, $a=3$ $(x-2)^2 = 12(y-1)$ 

مثال ۳۷: مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصله‌ی آن‌ها از خط $x=-1$ برابر فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $(1,0)$ باشند؟

هادی

کانون

تعریف / تعریف سهمی است.



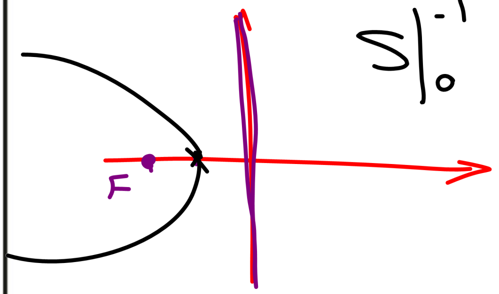
$S\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $a=1$

$(y-0)^2 = 4(x)$

$y^2 = 4x$

مثال ۳۸: در یک سهمی محور xها، محور سهمی و محور yها خط هادی سهمی است اگر کانون $F(-۲,۰)$ باشد معادله سهمی را بیابید.

محور تقارن

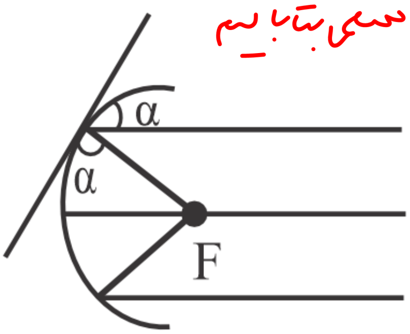


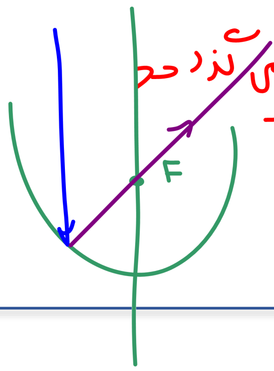
$S\Big|_{0}^{-1}$ $a=1$

$(y-0)^2=-4(x+1)$

خاصیت بازتابندگی سهمی

اگر پرتو نوری را موازی محور تقارن سهمی به سهمی بتابانیم بازتابش آن از کانون می‌گذرد





مثال ۴۰: دو اشعه نورانی به موازات، محور yها، بر بدنه‌ی داخل سهمی $x^2-2x+4y=11$ می‌تابد پرتوهای بازتابش در کدام نقطه متعاطند.

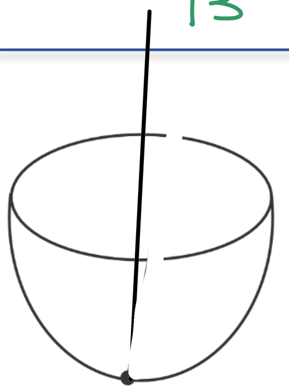
$\underbrace{x^2-2x+1}=-4y+11+1$

$(x-1)^2=-4(y-3)$

$S\Big|{}^{1}_{3}$ $a=1$

$F(1,2)$

⟸ دیش مخابراتی


S

$\Rightarrow \boxed{a=\frac{d^2}{16h}}$

ارتفاع یا گودی

$a=\frac{4R^2}{16h}$

$\boxed{a=\frac{R^2}{4h}}$

مثال ۴۱: در یک دیش ماهواره‌ای به شکل سهموی با دهانه‌ی دایره‌ای به قطر ۶۰ و گودی ۹۰، فاصله کانونی را محاسبه کنید.

$R=30$

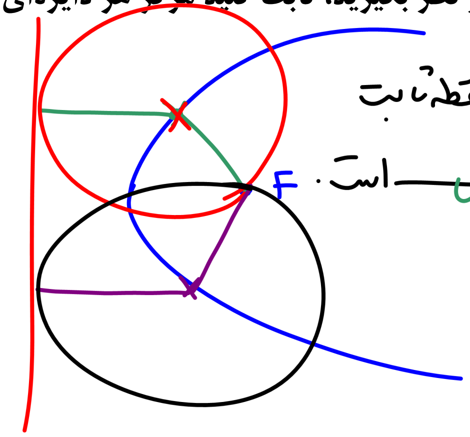
$h=90$

$a=\frac{R^2}{4h}=\frac{9\cancel{0}0}{4\times 9\cancel{0}}=\frac{10}{4}$

مثال ۴۲: اگر در یک دیش ماهواره‌ای به شکل سهموی عمق دیش دو برابر شود فاصله کانونی چه تغییری می‌کند؟

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{\cancel{R_2^2}}{\cancel{4}h_2}}{\frac{\cancel{R_1^2}}{\cancel{4}h_1}}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{\cancel{k_1}}{2\cancel{k_1}}=\frac{1}{2}$

مثال ۴۳: سهمی P با کانون F و هادی d را در نظر بگیرید، ثابت کنید مرکز هر دایره‌ای که از F بگذرد، و به d مماس باشد، روی سهمی است؟



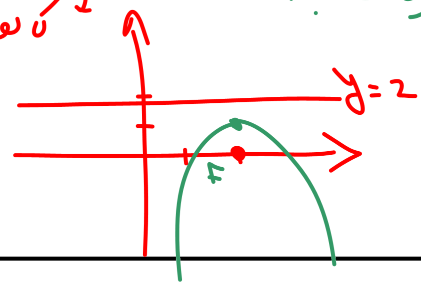
* مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت بگذرند و به یک خط مماس باشند ← سهمی است.

مثال ۴۴: معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که از نقطه‌ی (۲,۰) گذشته و بر خط y=۲ مماس است؟

هادی   کانون

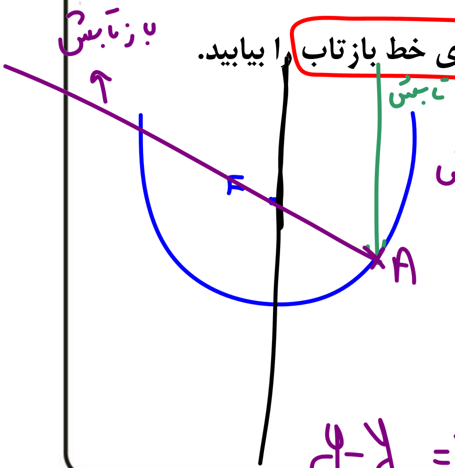
مکان هندسی مراکز دایره هایی که از یک نقطه بگذرند و به یک خط مماس باشند ← سهمی

$S|^2 , a=1$



$(x-2)^2=-4(y-1)$

مثال ۴۶: یک شعاع نورانی در امتداد خط x=۴ به سهمی $x^2=8y$ می‌تابد معادله‌ی خط بازتاب را بیابید.



* نقطه‌ی برخورد تابش با سهمی را A
* کانون را F
* شیب را m

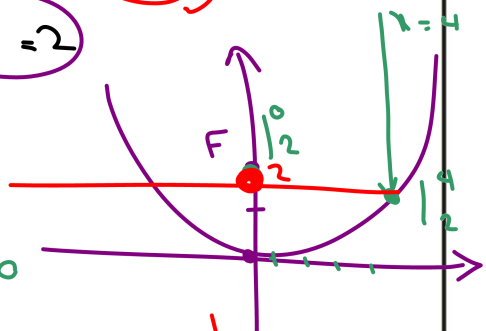
* $y-y_A=m(x-x_A)$

$S|^0 , a=2$

$x=4 \rightarrow 16=8y$

$\boxed{y=2}$

$m=\frac{2-2}{4-0}=0$



معادله بازتاب: $y=2$